数　学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲの設問について解答せよ。ただし，Ⅰ，Ⅱについては問題文中の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入せよ。なお，解答が分数になる場合は，すべて既約分数で答えること。

Ⅰ

〔1〕 $a > 0$ とする。2次不等式 $x^2 + (2 - a)x - 2a < 0$ を解くと，

$\boxed{ア} < x < \boxed{イ}$ となり，2次不等式 $x^2 + 2(a - 1)x - 4a > 0$ を解くと，$x < \boxed{ウ}$，$\boxed{エ} < x$ となる。

この2つの2次不等式の解が共通範囲を持たないような a の値の範囲は，$\boxed{オ} \leqq a \leqq \boxed{カ}$ となる。

〔2〕 △OAB において，$\left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{10}$，OB $= 3$ であるとき，内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ は $\boxed{キ}$，OA $= \boxed{ク}$，AB $= \boxed{ケ}$ である。また，△OAB の面積は $\boxed{コ}$ となる。

次に，点 O を中心とする半径 $\sqrt{15}$ の円周上を点 P が動くとき，△PAB の面積の最大値は $\boxed{サ}$ である。

〔3〕 関数 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ について，方程式 $f(x) = 0$ の解は，$x = \boxed{シ}$，$\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$ である。ただし，$\boxed{シ} < \boxed{ス} < \boxed{セ}$ とする。

このとき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は $\boxed{ソ}$ である。

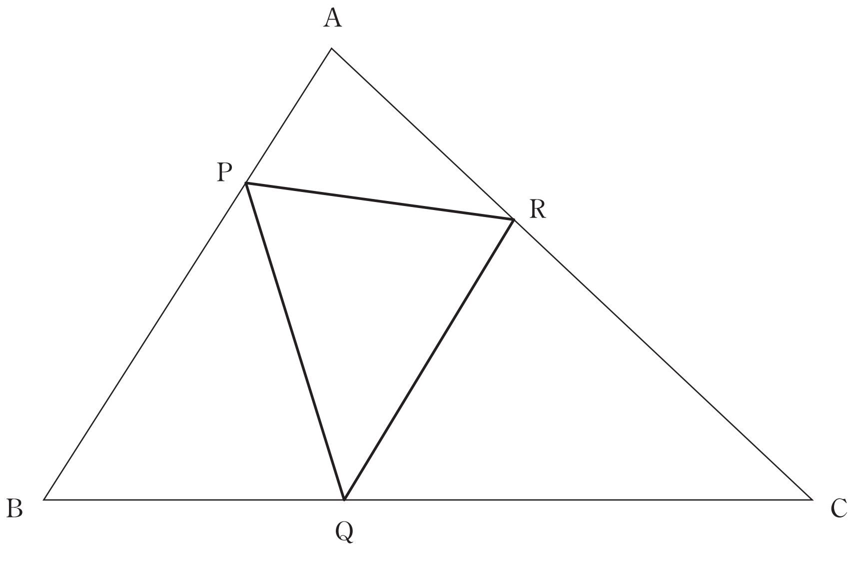
Ⅱ　図のような△ABC の形をした土地があり，その土地開発を次のように計画している。

辺 AB を $\alpha:(1-\alpha)$ に内分する点を P，辺 BC を $\beta:(1-\beta)$ に内分する点を Q，辺 CA を $\gamma:(1-\gamma)$ に内分する点を R とする。図のように，△ABC の中心部に全体の 25 %の面積を占める△PQR の庭園と，その庭園を囲むように，商業施設建設のための 3 つの三角形の土地をつくる。ただし，$\alpha+\beta+\gamma=1$，$0<\alpha<\beta<\gamma<1$ を満たすようにする。

△ABC，△BPQ，△CRQ，△APR の面積をそれぞれ S，S_1，S_2，S_3 とすると，$\dfrac{S_1}{S}=\boxed{\text{ア}}$，$\dfrac{S_2}{S}=\boxed{\text{イ}}$，$\dfrac{S_3}{S}=\boxed{\text{ウ}}$ である。このとき，各三角形の面積の関係により，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\boxed{\text{エ}}$ が成立する。

$\alpha\beta\gamma=k$ とおくと，α，β，γ は，方程式 $x^3-\boxed{\text{オ}}\,x^2+\boxed{\text{カ}}\,x-k=0$ の実数解であるので，k のとりうる範囲は，$0<k<\boxed{\text{キ}}$ である。このとき，α，β，γ は，$0<\alpha<\boxed{\text{ク}}<\beta<\boxed{\text{ケ}}<\gamma<\boxed{\text{コ}}$ を満たしている。

図



Ⅲ　自然数 n の正の約数のうち，２番目に大きいものを《 n 》と表す。
ただし，$2 \leqq n \leqq 100$ とする。たとえば，《５》＝１，《９》＝３ である。

次の問いに答えよ。

〔１〕 $\displaystyle\sum_{k=2}^{8}$《 k 》を求めよ。

〔２〕 $\displaystyle\sum_{k=2}^{20}$《 $3k$ 》を求めよ。

〔３〕《 n 》＝７ を満たす n をすべて求めよ。

〔４〕《 n^2 》＝ n ならば，《 n 》＝１ であることを証明せよ。