数　学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ　$p \geqq 0$，$q \geqq 0$ に対して，定積分 $I(p,\ q)$ を次のように定める。

$$I(p,\ q)=\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$$

〔1〕 $I(p,\ 0)=\boxed{\text{ア}}$ である。$q>0$ のとき，$I(p,\ q)$ に対し，部分積分法を１回用いると

$$I(p,\ q)=\boxed{\text{イ}}\,I\left(p+1,\ \boxed{\text{ウ}}\right)$$

を得る。この関係式より，m，n を自然数とすると

$$I(m,\ n)=\frac{\boxed{\text{エ}}}{(m+n+1)!}$$

が得られる。

（注：$\boxed{\text{エ}}$ には，I を用いない m，n の式を入れよ。）

〔2〕 ３次関数 $y=f(x)$ のグラフが，x 軸と２つの共有点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(\alpha<\beta,\ \alpha\beta\neq 0)$ をもち，$x=\beta$ で x 軸に接するとする。この３次関数 $f(x)$ について，$f(0)=2\alpha\beta^2$ であるとき，$f(x)$ の最高次の係数は $\boxed{\text{オ}}$ である。このとき，この３次関数のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積 S を $I(1,\ 2)$ を用いて表すと

$$S=\boxed{\text{カ}}\,I(1,\ 2)$$

となる。特に $S=\dfrac{3}{8}$ のとき，$\beta-\alpha=\boxed{\text{キ}}$ である。

（注：$\boxed{\text{カ}}$ には，積分記号を含まない α，β の式を入れよ。$\boxed{\text{キ}}$ には，数を入れよ。）

〔3〕 最高次の係数が1である6次関数 $y = g(x)$ について，方程式 $g(x) = 0$ が $x = \alpha$ のとき2重解，$x = \beta$ のとき4重解をもつとする。ただし，$\alpha < \beta$ とする。このとき，曲線 $y = g(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{ク}}$ である。

Ⅱ　Oを原点とする座標平面上において，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ を満たす実数θに対し，方程式

$$(1+\sin\theta)x-(\cos\theta)y=\cos\theta$$

で表される直線をl_θとする。$\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，直線l_θはx軸と点P$\left(\boxed{\text{ケ}},\ 0\right)$で交わり，y軸と点Q$\left(0,\ \boxed{\text{コ}}\right)$で交わる。また，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，直線l_θはy軸と一致する。

一方，θを媒介変数とする点R$\left(\boxed{\text{サ}},\ \sin\theta\right)$は，直線$l_\theta$上に存在する。

点$(-1,\ 0)$と点$(1,\ 0)$を結ぶ線分上に点Pが存在するθの範囲は $\boxed{\text{シ}}$ である。また，点Pのx座標をtと書くとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$はtを用いて

$$\sin\theta=\boxed{\text{ス}},\quad \cos\theta=\boxed{\text{セ}}$$

と表せる。

$-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$ を満たす実数αに対して，θが$-\dfrac{\pi}{2}$からαまで変化するとき，点Rの軌跡をC_αとする。ただし，$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ のとき，点Rの座標は$(0,\ -1)$と定める。曲線C_αと直線l_αで囲まれた図形の面積を$S(\alpha)$とする。

〔1〕 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$S(\alpha)=\boxed{\text{ソ}}$ である。$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ で，$\alpha=\cos\alpha$ を満たすαをβとする。このとき，$S(\beta)=\boxed{\text{タ}}$ である。

〔2〕 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$ のとき，$S(\alpha)=\boxed{\text{チ}}$ である。〔1〕のβに対して，$S(\pi-\beta)=\boxed{\text{ツ}}$ である。

〔3〕 曲線C_αの長さの半分が$S(\alpha)$に一致するとき，$\alpha=\boxed{\text{テ}}$ である。

Ⅲ　Oを原点とする座標空間における4点A(1，0，0)，B(0，1，0)，C(0，0，1)，D(0，0，−1)をとる。

〔1〕　3点A，B，Cの定める平面ABCと原点を通る直線lが交わる点をPとする。直線lが点$\left(1,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$を通るとき，点Pの座標は

$$\left(\boxed{\text{ト}},\ \boxed{\text{ナ}},\ \boxed{\text{ニ}}\right)$$

となる。

0＜a＜1 である実数aを用いて，線分ABを a：(1−a) に内分する点をMとしたとき，Mの座標は

$$\left(\boxed{\text{ヌ}},\ \boxed{\text{ネ}},\ \boxed{\text{ノ}}\right)$$

と表せる。このとき，線分MPの長さの2乗をaを用いて表すと，

$$\mathrm{MP}^2 = 2\left(a - \boxed{\text{ハ}}\right)^2 + \boxed{\text{ヒ}}$$

となる。よって，線分MPの長さを最小にするaの値は $\boxed{\text{ハ}}$ となる。

(注：$\boxed{\text{ハ}}$，$\boxed{\text{ヒ}}$ には，数を入れよ。)

〔2〕　点Pを通るz軸に平行な直線と3点A，B，Dの定める平面ABDとの交点をQとする。〔1〕で求めた線分MPの長さを最小にするaの値を用いるとき，線分MQの長さは $\boxed{\text{フ}}$ となるので，∠PMQをθとしたとき，$\cos\theta = \boxed{\text{ヘ}}$ となる。よって，△PMQの面積は $\boxed{\text{ホ}}$ となる。

3点P，M，Qの定める平面PMQへ点Cから垂線を下ろす。垂線の足をHとするとき，線分CHの長さは $\boxed{\text{マ}}$ となる。よって，四面体CPMQの体積は $\boxed{\text{ミ}}$ となる。

Ⅳ　図１のように 10 点がそれぞれ辺で結ばれている図をＡさんとＢさんに渡した。さらにＢさんは図２のように横軸と縦軸に数字を書き込んだ。図１においてＡさんが無作為に選んだ点を，Ｂさんが見てその点を横軸と縦軸の数字で評価する。例えば，図２の点Ｐの横軸の評価は２で，縦軸の評価は７である。

〔１〕 Ａさんが 10 点の中から１点を選ぶとき，Ｂさんによる横軸の評価が２以上である確率は $\boxed{\text{ム}}$ である。また，横軸と縦軸の評価の積が 18 以上になる確率は $\boxed{\text{メ}}$ である。

〔２〕〔１〕と同様に，Ａさんが 10 点の中から１点を選ぶ試行を２回繰り返すとき，その２点が同じ点である確率は $\boxed{\text{モ}}$ である。また，その２点を結ぶ辺の数の最小値が２以上である確率は $\boxed{\text{ヤ}}$ である。ただし，図３において，２点を結ぶ辺の数の最小値の例を挙げる。

次に，１点目の縦軸の評価と２点目の横軸の評価の積が 18 以上になる確率は $\boxed{\text{ユ}}$ になる。また，２点目の横軸の評価が２以上であることがわかったときに，１点目の縦軸の評価と２点目の横軸の評価の積が 18 以上になる確率は $\boxed{\text{ヨ}}$ である。

〔３〕 最後に，Ａさんが 10 点の中から１点を選ぶ試行を 10 回繰り返すとき，選んだ全ての点が異なる点である確率は $\boxed{\text{ラ}}$ である。

（注：$\boxed{\text{ム}}$ ～ $\boxed{\text{ヨ}}$ は，既約分数で答えよ。）

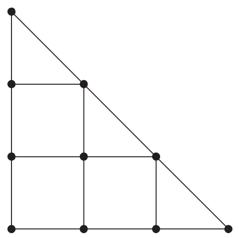

図１：Aさんが使用する図

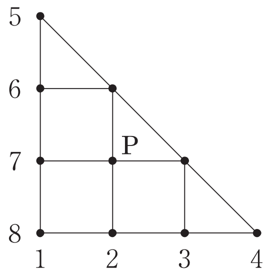

図２：Bさんが使用する図

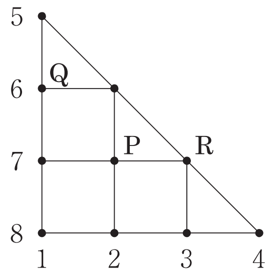

図３：２点を結ぶ辺の数の最小値の例
２点 P，Q 間の辺の数は２
２点 P，R 間の辺の数は１
２点 Q，R 間の辺の数は２