数　学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲの設問について解答せよ。ただし，Ⅰ，Ⅱについては問題文中の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入せよ。なお，解答が分数になる場合は，すべて既約分数で答えること。

Ⅰ

〔1〕 不等式 $(|x|+1)^2+y^2 \leqq 4$ の表す座標平面上の領域を D とする。

（a） 方程式 $(|x|+1)^2+y^2=4$ を満たす図形と，x 軸との共有点の座標は，

$\left(\boxed{ア},\ 0\right)$ と $\left(-\boxed{ア},\ 0\right)$ で，y 軸との共有点の座標は，

$\left(0,\ \boxed{イ}\right)$ と $\left(0,\ -\boxed{イ}\right)$ である。

ただし，$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ は正の数とする。

（b） 領域 D の表す図形の面積は $\boxed{ウ}$ である。

（c） 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x+y$ の最大値は $\boxed{エ}$ で，最小値は $\boxed{オ}$ である。

（d） 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$(x-3)^2+(y-2)^2$ の最大値は $\boxed{カ}$ で，最小値は $\boxed{キ}$ である。

〔2〕 サイコロを3回投げるとき，出た目の最小値を m，最大値を M とする。ただし，$m \leqq M$ とする。

（a） $m = 5$ となる確率は $\boxed{\text{ク}}$ である。

（b） $m \leqq 4 \leqq M$ となる確率は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

（c） $m = 2$ かつ $M = 6$ となる確率は $\boxed{\text{コ}}$ である。

（d） $M - m = 3$ となる確率は $\boxed{\text{サ}}$ である。

〔3〕 点 $(-5,\ 7)$ から，放物線 $y = \dfrac{1}{4}x^2 + 1$ ……① に引いた接線のうち，傾きが大きい方の接線を l_1 とするとき，l_1 の方程式は，$y = \boxed{\text{シ}}\,x - \boxed{\text{ス}}$ である。また，l_1 に垂直で，放物線①に接する直線を l_2 とするとき，l_2 の方程式は，$y = \boxed{\text{セ}}\,x + \boxed{\text{ソ}}$ である。

次に，放物線①と l_1 の接点をA，l_1 と l_2 の交点をB，放物線①と l_2 の接点をCとする。線分ABと線分BCを隣り合う2辺とする長方形の残りの頂点をDとするとき，長方形ABCDの面積は $\boxed{\text{タ}}$ である。また，放物線①と l_1，l_2 で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{チ}}$ である。

Ⅱ　次の問いに答えよ。ただし，$\boxed{\text{サ}}$ と $\boxed{\text{ス}}$ 以外はすべて正の整数で解答すること。なお，解答にあたっては，以下の（1），（2）を用いる。

（1）　a を実数とするとき，a を超えない最大の整数を，記号を用いて $[\,a\,]$ と表す。このとき，$[\,a\,] \leqq a < [\,a\,] + 1$ である。

（2）　$b \geqq 0$，$c \geqq 0$ のとき，$\sqrt{b} \geqq \sqrt{c} \Leftrightarrow b \geqq c$ である。

ある工場の経営者が雇いたい人の数 A（人）と，この工場で働きたい人の数 B（人）は，時給 P（円）によって変化する。ただし，A と B は整数であり，P は $800 \leqq P \leqq 1600$ を満たす整数とする。

A は次の式①で決まることが知られている。

$$A = \left[\sqrt{20\,(\,3081 - P\,)}\,\right] \quad \cdots\cdots \text{①}$$

例えば，時給が $P = 1801$ のとき，この経営者が雇いたい人の数は，式①より $\boxed{\text{ア}}$ である。

一方，B は次の式②で決まることが知られている。

$$B = \left[\sqrt{50\,(\,P - 280\,)}\,\right] \quad \cdots\cdots \text{②}$$

例えば，時給が $P = 730$ のとき，この工場で働きたい人の数は，式②より $\boxed{\text{イ}}$ である。

この経営者は，雇いたい人の数 A と，工場で働きたい人の数 B が等しくなる時給で人を雇いたいと考えている。

まず，

$$20\,(\,3081 - Q\,) = 50\,(\,Q - 280\,) \quad \cdots\cdots \text{③}$$

を満たす Q を求め，小数第1位を四捨五入すると，その値は $\boxed{\text{ウ}}$ となる。$\boxed{\text{ウ}}$ の値を時給 P として考えると，$A = B = \boxed{\text{エ}}$ となる。

次に，$A = B =$ $\boxed{\text{エ}}$ となるPを求める。ただし，Pが複数求められる場合は，経営者は最も低い時給を選択するものとする。まず，$A =$ $\boxed{\text{エ}}$ であるとき，式①より，次の不等式④が成立する。

$$\left(\boxed{\text{エ}}\right)^2 \leqq 20\,(3081 - P) < \left(\boxed{\text{エ}} + 1\right)^2 \cdots\cdots ④$$

この不等式を満たす整数Pのうち，最小のものは $\boxed{\text{オ}}$ であり，最大のものは $\boxed{\text{カ}}$ である。一方，$B =$ $\boxed{\text{エ}}$ であるとき，式②より，次の不等式⑤が成立する。

$$\left(\boxed{\text{エ}}\right)^2 \leqq 50\,(P - 280) < \left(\boxed{\text{エ}} + 1\right)^2 \cdots\cdots ⑤$$

この不等式を満たす整数Pのうち，最小のものは $\boxed{\text{キ}}$ であり，最大のものは $\boxed{\text{ク}}$ である。以上の結果から，経営者が最も低い時給を選ぶと，その値は $\boxed{\text{ケ}}$ となる。

ここで，$\boxed{\text{ケ}}$ をP_0，$\boxed{\text{エ}}$ をX_0で表し，時給がP_0から変化したときの工場で働くことができる人の数の変化を考える。ただし，変化後の価格のもとで求められるAとBが異なる場合は，工場で働くことができる人の数はAとBの小さい方の数で決まるものとする。

経営者が時給を381円上げる場合を考える。このときの時給P_1は，$P_1 = P_0 + 381$になるので，この工場で働くことができる人の数X_1は$X_1 =$ $\boxed{\text{コ}}$ になる。X_0とX_1の大小関係について，不等号を用いて表すと $\boxed{\text{サ}}$ になる。一方，経営者が時給を152円下げる場合を考える。このときの時給P_2は，$P_2 = P_0 - 152$になるので，この工場で働くことができる人の数X_2は$X_2 =$ $\boxed{\text{シ}}$ になる。X_0とX_2の大小関係について，不等号を用いて表すと $\boxed{\text{ス}}$ になる。

Ⅲ　$a_1 = 2$，$a_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{a_n}$　($n = 1$，2，3，$\cdots$) によって定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{b_n\}$ を，$b_n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ で定義する。

〔1〕　b_2，b_3 を求めよ。

〔2〕　b_{n+1} を b_n と b_{n-1} を用いて表せ。ただし，n は2以上の自然数とする。

〔3〕　$c_n = b_{n+1} - b_n$ と定めるとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

〔4〕　数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

〔5〕　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。