立命館大学ファイナルセミナー 理系数学

出題形式と対策

- 大問 4 題．すべて空所補充問題．100 分．

- 文字 (代数) が非常に多く，そのため抽象的 (一般的) になり分かりにくい．x, y を除いて 3 文字以上出てくることが多い．
文字が多い場合，どの文字について整理するかで結果として得られる式が複数考えられることが多い．したがって，空所補充問題の場合は求められている形から適切に変形していくだけの計算力も必要となる．特に，方程式ですべての項に共通の因数がある場合は速やかに因数分解するか，0 になる可能性がない (または常に正) ときは割っておくべきである (例えば問題 I [2] の r^2).

- 問題の難易度は標準的と言われることが多いが，誘導がなければかなり難しいと思われる内容も出題されている．
例えば問題Ⅲの $K(r)$ の極限は「広義積分」と言われるもので，巧みな誘導で計算させている．

- 誘導は適切かつ丁寧．ただ，難易度の高い内容の場合はその分野についての深い理解がなければ誘導の意図がくみ取れず混乱する可能性もある．
問題Ⅱは頻出問題の 1 次不定方程式だが，$ax + by = c$ は a と b が互いに素ではないとき c が a と b の最大公約数の倍数でない場合整数解 x, y を持たないという，基本レベルではあまり出てこない設定からスタートしている．この辺りでスムーズに対応できず時間をかけてしまうと，[2] で急に複雑になってくるので時間が足らなくなる．
また，問題Ⅲ [1][2] の結果は [3] で用いるが，置換積分で余裕がなければ適切に処理するのは困難だと思われる．

- 単純な具体的計算も含め計算量は多い．誘導で混乱してしまうと時間が足らなくなる．
問題Ⅲ [3] 最後の「J についても同様の方法で求めると」もそれほど単純ではないので，下書きも多少丁寧にする方が結果的に早くできるはずである．

- 対策としては，誘導がなくとも解けるだけの力をつけることが理想だが，残された時間を考えると過去問を解くことを通じて誘導に慣れることが最善と思われる．もちろん基礎学力があってのことなので，苦手分野についてはしっかり補強をすべきである．最低限過去問をしっかり解き，できれば数学の実力アップのための演習も問題集等で行っていこう．

Ⅲ　実数 r を $0 \leqq r < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする。次式によって与えられる定積分

$$K(r) = \int_{-r}^{r} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$$

の極限 $\displaystyle\lim_{r \to \frac{1}{\sqrt{2}}-0} K(r)$ を以下の手順にしたがって求める。まず，準備として，次の〔1〕,〔2〕,〔3〕について考える。

〔1〕　区間［0, 1］で関数 $f(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ を考える。$f'(t) = \boxed{\text{ア}} \geqq 0$ より，$f(t)$ の値域は $0 \leqq f(t) \leqq \boxed{\text{イ}}$ である。

また $\sqrt{1-\{f(t)\}^2} = \boxed{\text{ウ}}$ である。

〔2〕　α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ で $\tan\alpha = \sqrt{2}+1$ を満たしているとき

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \boxed{\text{エ}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{エ}}$ は α を用いずに答えよ。

〔3〕　定積分 I と J をそれぞれ次のようにおく。

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2}+\sin\theta}, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\sin\theta}$$

まず，I を計算する。〔1〕で定義した $f(t)$ を用いて $\sin\theta = f(t)$ とおき，置換積分法を使うと，I は

$$I = \int_0^1 \frac{\boxed{\text{オ}}}{\left(t+\boxed{\text{カ}}\right)^2 + \left(\boxed{\text{キ}}\right)^2} dt$$

となる。ただし，$\boxed{\text{キ}}$ は正の実数である。ここで

$t + \boxed{\text{カ}} = \boxed{\text{キ}} \tan u$ とおいて置換積分法を使って〔2〕の α を用いて I を求めると $I = \boxed{\text{ク}}$ となる。

次に，J についても同様の方法で求めると，$J = \boxed{\text{ケ}}$ となる。

〔4〕〔1〕から〔3〕までの準備のもとで，極限 $\displaystyle\lim_{r \to \frac{1}{\sqrt{2}}-0} K(r)$ を求める。ここで，

$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$ とおいて $K(r)$ に置換積分法を用いると，

極限 $\displaystyle\lim_{r \to \frac{1}{\sqrt{2}}-0} K(r)$ は，I と J を用いて $\boxed{\text{コ}}$ と表すことができる。したがって，極限 $\displaystyle\lim_{r \to \frac{1}{\sqrt{2}}-0} K(r)$ は，$\boxed{\text{サ}}$ となる。