（第３時限：100分）

2020年度　②

数　学　問　題

（理　系）

（全７ページ）

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙１枚・下書用紙２枚は，この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後，問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数　学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ　座標平面上に点A，点Bをとる。線分ABの長さは，実数の定数 r（ただし $r>2$）を用いて，$r+2$ と表される。点Aが x 軸上を動き，点Bが y 軸上を動くとき，線分ABを $2:r$ に内分する点Pの軌跡を表す曲線 C を考える。

〔1〕　点Aの座標を $(a,\ 0)$，点Bの座標を $(0,\ b)$，点Pの座標を $(x,\ y)$ とするとき，a，b を r，x，y を用いて表すと，$a=\boxed{\text{ア}}$，$b=\boxed{\text{イ}}$ となる。そして，曲線 C の方程式は，次のように表される。

$$\boxed{\text{ウ}}=1$$

ただし，$\boxed{\text{ウ}}$ には，a と b は入らないとする。

〔2〕　実数 s，t を用いて方程式 $y=sx+t$ で表される直線を l_1 とする。直線 l_1 が曲線 C と共有点をもつとき，共有点の x 座標は次の方程式の解である。

$$\left(\boxed{\text{エ}}\right)x^2+2r^2stx+\left(\boxed{\text{オ}}\right)=0$$

ただし，$\boxed{\text{エ}}$ と $\boxed{\text{オ}}$ は，r，s，t を用い，x と y は用いずに答えよ。

　直線 l_1 が曲線 C の接線となるための必要十分条件は，r，s，t を用いて表すと

$$\boxed{\text{カ}}=4$$

である。

〔3〕 直線 l_2 と直線 l_3 が垂直で，点 Q $(p,\ q)$ で交わるとする。

まず，直線 l_2 が，x 軸と y 軸に平行ではない場合について考える。直線 l_2 の傾きを u とおくと，直線 l_2 の方程式は $y = \boxed{\text{キ}}$ と表される。直線 l_3 の方程式は $y = \boxed{\text{ク}}$ と表される。

直線 l_2 が曲線 C の接線となるための必要十分条件は，

$$\left(\boxed{\text{ケ}}\right)u^2 + 2pqu + \left(\boxed{\text{コ}}\right) = 0$$

である。ただし，$\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ は，p，q，r を用いて表す。一方，直線 l_3 が曲線 C の接線となるための必要十分条件は，

$$\left(\boxed{\text{コ}}\right)u^2 - 2pqu + \left(\boxed{\text{ケ}}\right) = 0$$

である。このとき，直線 l_2 と直線 l_3 の両方が曲線 C の接線であるように点 Q が動くとき，点 Q の軌跡を表す方程式は，r を用いて次のように表される。

$$p^2 + q^2 = \boxed{\text{サ}}$$

なお，直線 l_2 が，x 軸あるいは y 軸に平行な場合にも，この方程式は成り立っている。

Ⅱ　自然数 a, b, ℓ に対して，a と b の最大公約数を d とする。このとき，1次不定方程式

$$ax + by = d\ell \quad \cdots\cdots (1)$$

の整数解 x, y を考える。

〔1〕 自然数 a', b' を用いて $a = a'd$, $b = b'd$ と表すと，a' と b' の最大公約数は $\boxed{\text{ア}}$ であり，式（1）は

$$a'x + b'y = \ell \quad \cdots\cdots (2)$$

となる。特に $\ell = 1$ のときの1次不定方程式（2）の整数解の1つを x_0, y_0 とすると，次のようになる。

$$a'x_0 + b'y_0 = 1 \quad \cdots\cdots (3)$$

式（2）から式（3）の ℓ 倍を引くと

$$a'(x - \ell x_0) + b'(y - \ell y_0) = 0 \quad \cdots\cdots (4)$$

となる。a' と b' の最大公約数が $\boxed{\text{ア}}$ であり，$x - \ell x_0$ と $y - \ell y_0$ はともに整数であることから，$x - \ell x_0$ は $\boxed{\text{イ}}$ の倍数，$y - \ell y_0$ は $\boxed{\text{ウ}}$ の倍数となる。ここで，整数 m を用いて

$$\frac{x - \ell x_0}{\boxed{\text{イ}}} = \frac{-(y - \ell y_0)}{\boxed{\text{ウ}}} = m \quad \cdots\cdots (5)$$

とおくと，方程式（1）の整数解は

$$x = \boxed{\text{エ}}, \quad y = \boxed{\text{オ}}$$

と表される。

〔2〕 $d = 1$ とする。整数解 $(x,\ y) = \left(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}\right)$ のうち，実数 c に対して不等式 $y < -x^2 + c$ を満たすものを考える。

$y = -x^2 + c$ で定まる放物線と，1次不定方程式（1）すなわち $ax + by = \ell$ で定まる直線は，$c > \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{4b^2}$ のときに異なる2つの共有点をもち，その座標は

$$\left(\frac{a \pm \boxed{\text{キ}}}{2b},\ \frac{2b\ell - a^2 \mp a\boxed{\text{キ}}}{2b^2}\right) \quad \text{（複号同順）}$$

である。特に x 座標に注目すれば，整数解 $(x,\ y) = \left(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}\right)$ が $y < -x^2 + c$ を満たすためには，式（5）の m は不等式

$$\boxed{\text{ク}} - \frac{\boxed{\text{キ}}}{2b^2} < m < \boxed{\text{ク}} + \frac{\boxed{\text{キ}}}{2b^2} \quad \cdots\cdots（6）$$

を満たす必要がある。したがって，$a = 2$，$b = 3$，$\ell = 2$ のとき，不等式（6）を満たす m の値がちょうど2個存在するために c がとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{ケ}} < c \leqq \boxed{\text{コ}}$$

であることがわかる。

Ⅲ　実数 r を $0 \leqq r < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする。次式によって与えられる定積分

$$K(r) = \int_{-r}^{r} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$$

の極限 $\displaystyle\lim_{r \to \frac{1}{\sqrt{2}}-0} K(r)$ を以下の手順にしたがって求める。まず，準備として，次の〔1〕,〔2〕,〔3〕について考える。

〔1〕　区間［0，1］で関数 $f(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ を考える。$f'(t) = \boxed{\text{ア}} \geqq 0$ より，$f(t)$ の値域は $0 \leqq f(t) \leqq \boxed{\text{イ}}$ である。

また $\sqrt{1-\{f(t)\}^2} = \boxed{\text{ウ}}$ である。

〔2〕　α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ で $\tan\alpha = \sqrt{2}+1$ を満たしているとき

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \boxed{\text{エ}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{エ}}$ は α を用いずに答えよ。

〔3〕　定積分 I と J をそれぞれ次のようにおく。

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2}+\sin\theta}, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\sin\theta}$$

まず，I を計算する。〔1〕で定義した $f(t)$ を用いて $\sin\theta = f(t)$ とおき，置換積分法を使うと，I は

$$I = \int_0^1 \frac{\boxed{\text{オ}}}{\left(t + \boxed{\text{カ}}\right)^2 + \left(\boxed{\text{キ}}\right)^2} dt$$

となる。ただし，$\boxed{\text{キ}}$ は正の実数である。ここで

$t + \boxed{\text{カ}} = \boxed{\text{キ}} \tan u$ とおいて置換積分法を使って〔2〕の α を用いて I を求めると $I = \boxed{\text{ク}}$ となる。

次に，J についても同様の方法で求めると，$J = \boxed{\text{ケ}}$ となる。

〔4〕〔1〕から〔3〕までの準備のもとで，極限 $\lim_{r \to \frac{1}{\sqrt{2}} - 0} K(r)$ を求める。ここで，

$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta$ とおいて $K(r)$ に置換積分法を用いると，

極限 $\lim_{r \to \frac{1}{\sqrt{2}} - 0} K(r)$ は，I と J を用いて $\boxed{\text{コ}}$ と表すことができる。したがって，極限 $\lim_{r \to \frac{1}{\sqrt{2}} - 0} K(r)$ は，$\boxed{\text{サ}}$ となる。

Ⅳ　虚数単位を i とし，α，β，γ，δ を虚数とする。

〔1〕　複素数平面上の点 z を原点を中心に $\arg\alpha$ だけ回転し，原点からの距離を $|\alpha|$ 倍し，β だけ平行移動した点は $\boxed{\text{ア}}$ と表される。

〔2〕　$z_0 = i$ とし，自然数 n に対して，点 z_n を以下のように定める。z_n は z_{n-1} を原点を中心に $\arg\alpha$ だけ回転し，原点からの距離を $|\alpha|$ 倍し，β だけ平行移動した点とする。$a_n = |z_n - z_{n-1}|$ とおき，数列 $\{a_n\}$ を考える。一般項 a_n を α，β および n で表すと，$a_n = \boxed{\text{イ}}$ となる。したがって，$|\alpha| < 1$ のとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{\text{ウ}}$$

である。

〔3〕　点 z を点 δ を中心に $\arg\gamma$ だけ回転し，点 δ からの距離を $|\gamma|$ 倍した点は $\boxed{\text{エ}}$ である。任意の複素数 z について $\boxed{\text{ア}} = \boxed{\text{エ}}$ が成り立つとき，γ，δ をそれぞれ α，β を用いて表すと，$\gamma = \boxed{\text{オ}}$，$\delta = \boxed{\text{カ}}$ である。

〔4〕　実数 θ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする。また，$\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos\theta + i\sin\theta)$ であり，$\boxed{\text{カ}} = 1$ が成り立つとする。複素数平面上で 1 が表す点を B とし，〔2〕で定めた z_n が表す点を P_n とする。三角形 P_0BP_2 の面積は $\boxed{\text{キ}}$ であり，三角形 $P_0P_1P_2$ の面積は $\boxed{\text{ク}}$ となる。

　三角形 $P_{n-1}P_nP_{n+1}$ の面積 S_n は $\boxed{\text{ケ}}$ となり，

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{2n-1} = \boxed{\text{コ}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$ は，z_0，z_1，z_2，z_{n-1}，z_n を用いずに表せ。