数　学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ

〔1〕 a を定数とする。x についての方程式

$$(2^x - 3^x)\left(\frac{3}{2^x} - \frac{2}{3^x}\right) = a \quad \cdots\cdots \text{①}$$ を考える。

$X = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ とおくと，方程式①は X を用いて

$$\boxed{\text{ア}}\,X + \frac{\boxed{\text{イ}}}{X} + a = \boxed{\text{ウ}} \quad \cdots\cdots \text{②}$$ となる。

X についての方程式②が異なる2つの正の実数解をもつ a の値の範囲は $\boxed{\text{エ}}$ である。

このとき，x についての方程式①も異なる2つの実数解 α，β をもち，方程式②の2つの解の積の値を考えると，$\alpha + \beta = \boxed{\text{オ}}$ であることがわかる。

〔2〕 ある水槽に水を入れておくと，1日（24時間）経つと水の容積が10％減少する。その水槽が空の時，1回目に10リットルの水を入れ，その後，1日経つ毎に p リットル $(0 < p < 10)$ の水をさらに入れるものとする。a_n は n 回目に水を入れた直後の水槽の水の容積（単位はリットル）とする。

数列 $\{a_n\}$ において，$n \geqq 1$ のとき a_{n+1} と a_n の間には，p を用いて $a_{n+1} = \boxed{\text{カ}}$ となる関係式が成り立つ。したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は n と p を用いて，$a_n = 10\left\{\boxed{\text{キ}}\right\}p + 10\boxed{\text{ク}}$ となる。

よって，毎回水を入れた直後の水の容積が常に一定となるのは，$p = \boxed{\text{ケ}}$ のときである。

〔3〕 生徒10人に対して，10点満点の数学の小テストを2回行なった。1回目の小テストの成績は平均点5（点），標準偏差2（点）であった。

2回目の小テストでは，成績が1回目3点から2点上がって5点になった生徒が3人，5点から3点上がって8点になった生徒が2人，逆に7点から1点下がって6点になった生徒が2人いた。他の3人の成績は，それぞれ1回目と変わらなかった。

このとき，1回目の小テストの成績の分散は $\boxed{\text{コ}}$ であり，2回目の小テストの成績は平均 $\boxed{\text{サ}}$ （点），標準偏差 $\boxed{\text{シ}}$ （点）である。

ただし，標準偏差が無理数になるときは無理数のままでよい。

Ⅱ　xy 平面上 ($z = 0$) に描かれた関数 $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ ($0 \leqq x \leqq 5$)（図１）を z 軸方向に１だけ平行移動させたとき，この関数の曲線の軌跡が描く曲面と，$z = 0$，および $z = 1$ の平面で囲まれた領域を容器とする立体を考える（図２）。また，図２のように上方に置かれた蛇口から静かに給水する。

単位時間当たりに流れ出る水の体積を q とし，水面は xz 平面に対して平行に保たれているものとする。

〔１〕 容器の最も深いところの xy 座標は $\left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}} \right)$ である。

時間 t の間に蛇口から流れ出る水の体積は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

容器が空の状態から水面が $y = 0$ に到達するまでの時間は $\boxed{\text{エ}}$ である。

水があふれ出るところの xy 座標は $\left(\boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}} \right)$ である。

容器が空の状態から水があふれ出るまでの時間は $\boxed{\text{キ}}$ である。

〔２〕 次に，水面の y 座標の上昇速度 $\dfrac{dy}{dt}$ と x に関する３次方程式 $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 - y = 0$ の解との関係を求めよう。ただし，容器は満水でも空でもないとする。

水面の y 座標が y のときの容器内の水の体積を $V(y)$ と表す。短い時間 Δt の間の水面の上昇量を Δy とする。このとき，水の体積の増分 $\Delta V = V(y + \Delta y) - V(y)$ を考える。Δy と $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 - s = 0$ の解の $\alpha(s)$，$\beta(s)$，$\gamma(s)$ (ただし，$\alpha(s) \leqq \beta(s) \leqq \gamma(s)$，$y \leqq s \leqq y + \Delta y$) のうち適当なものを用いて奥行き１の直方体を作り，その体積 $\boxed{\text{ク}}$ が ΔV と等しくなるように s をとることができる。また，短い時間 Δt の間に蛇口から流れ出る水の体積は $\boxed{\text{ケ}}$ なので，$\boxed{\text{ケ}} = \boxed{\text{ク}}$ となる。

ここで，$\Delta t \to 0$ のとき $\Delta y \to \boxed{\text{コ}}$，$s \to \boxed{\text{サ}}$ であるので，

$\dfrac{dy}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \boxed{\text{シ}}$ が得られる。

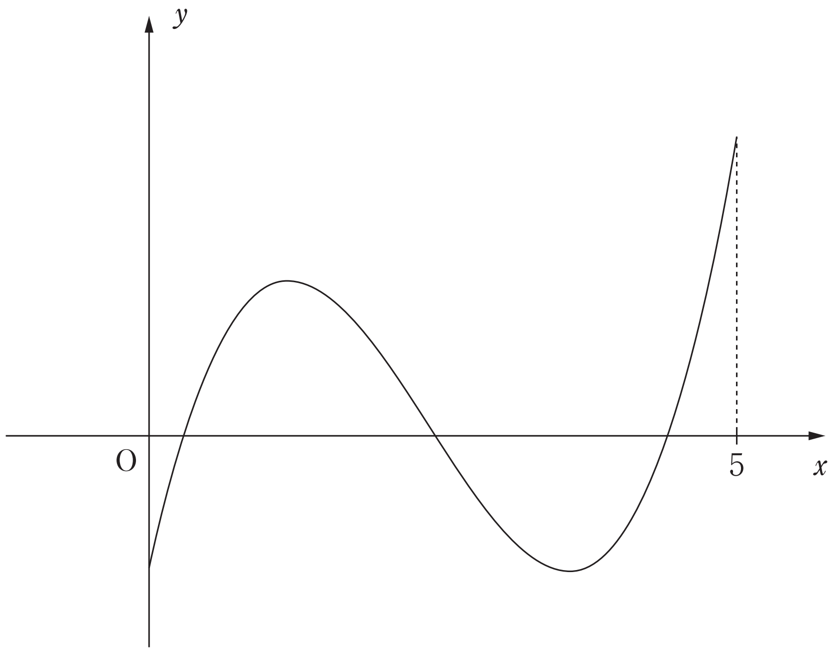

図 1

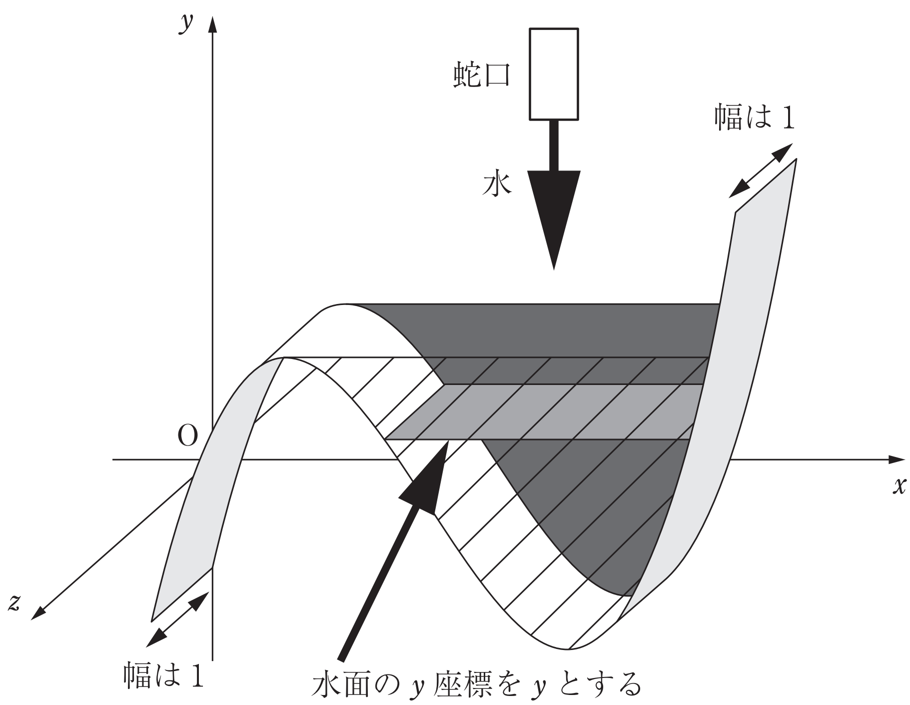

図 2

Ⅲ　空間座標において，4点O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(0,\ 1,\ 2)$，B$(2,\ -1,\ 3)$，P$(t,\ u,\ t)$があり，$\angle\mathrm{AOP} = 90^\circ$，$\mathrm{OP} = 2\sqrt{6}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

$t > 0$ のとき，$t = \boxed{\text{ア}}$，$u = \boxed{\text{イ}}$ である。これらの4点を通る球面をSとすると，球面Sの中心は$\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}\right)$であり，球面$S$の半径は $\boxed{\text{カ}}$ である。

さらに，球面Sと平面 $z = k$ が交わってできる円C_1の方程式はkを用いて

$\left(x + \boxed{\text{キ}}\right)^2 + \left(y + \boxed{\text{ク}}\right)^2 = \boxed{\text{ケ}}$ かつ $z = k$ と表される。この円の半径が$\sqrt{7}$ のとき，$k = \boxed{\text{コ}}$ または $\boxed{\text{サ}}$ である。

次に，3点O，A，Bを通る平面αを考えると，平面αに垂直で，x成分が正の単位ベクトル$\vec{n}$は$\left(\boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{ス}},\ \boxed{\text{セ}}\right)$である。このとき，平面$\alpha$と球面$S$が交わってできる円$C_2$の中心は$\left(\boxed{\text{ソ}},\ \boxed{\text{タ}},\ \boxed{\text{チ}}\right)$であり，円$C_2$の半径は $\boxed{\text{ツ}}$ である。

Ⅳ

〔1〕 箱の中に白色のカードが4枚，赤色のカードが3枚入っている。白色のカードには1から4までの自然数が，赤色のカードには5から7までの自然数がそれぞれ書かれている。箱からカードを1枚ずつ引き出し，引いたカードは箱に戻さないものとする。赤色のカードを箱から引いた時点で試行が終了するとき，次の問いに答えよ。

（a） 2回目ではじめて赤色のカードを引く確率は，$\boxed{\text{ア}}$ であり，3回目ではじめて赤色のカードを引く確率は，$\boxed{\text{イ}}$ である。

（b） 全ての引いたカードに書かれた数の合計が10である確率は，$\boxed{\text{ウ}}$ である。

（c） 引いたカードに書かれた数が全て奇数である確率は，$\boxed{\text{エ}}$ である。このとき，引いたカードの中に1のカードが含まれる確率は，$\boxed{\text{オ}}$ である。

〔2〕 箱の中に白色のカードが n 枚，赤色のカードが3枚入っている。引いたカードは箱に戻さずに，赤色のカードが出るまでカードを引く。x 回目で，はじめて赤色のカードを引く確率を $P_n(x)$ とすると，$n \geqq 3$ のとき，$\dfrac{P_{n+1}(4)}{P_n(4)}$ は n を用いて $\boxed{\text{カ}}$ で表される。$P_n(4)$ が最大になるのは，n が $\boxed{\text{キ}}$ または $\boxed{\text{ク}}$ のときである。