数　学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ　自然数 a_1，a_2 に対して，漸化式

$$a_{k+2} = |a_{k+1} - a_k|,\ (k = 1,\ 2, \ldots)$$

により数列 $\{a_k\}$ を定める。また，この数列において初項から0ではない項が連続する個数を n とおく。つまり，n は $a_{n+1} = 0$ を満たし，$k \leqq n$ なるすべての自然数 k に対して $a_k > 0$ を満たす自然数である。

〔1〕 $a_1 = 2$，$a_2 = 3$ のとき，$a_4 = \boxed{\text{ア}}$，$a_7 = \boxed{\text{イ}}$，$a_{16} = \boxed{\text{ウ}}$ である。また，$a_1 = 3$，$a_2 = 6$ のとき，$a_5 = \boxed{\text{エ}}$，$a_{16} = \boxed{\text{オ}}$，$a_{100} = \boxed{\text{カ}}$ である。

〔2〕 $a_1 = 3$，$a_2 = 2$ のとき，$n = \boxed{\text{キ}}$ であり，$a_n = \boxed{\text{ク}}$ である。また，$a_1 = 4$，$a_2 = 8$ のとき，$n = \boxed{\text{ケ}}$ であり，$a_n = \boxed{\text{コ}}$ である。

〔3〕 $a_1 = 15$ とする。このとき，$a_2 < a_1$ かつ $a_n = 1$ となる a_2 は全部で $\boxed{\text{サ}}$ 個存在する。

〔4〕 $a_1 = m$，$a_2 = 1$ とする。ただし，m は自然数である。このとき，m が偶数であれば $n = \boxed{\text{シ}}$ であり，m が奇数であれば $n = \boxed{\text{ス}}$ であって，n は m の1次式により表される。

Ⅱ　実数全体で定義された連続な関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ が以下の等式を満たすとする。

$$h(x) = \int_{-x}^{x} f(t-x)\,g(t+x)\,dt$$

〔1〕 $g(x) = e^x$ とする。ただし，e は自然対数の底とする。

$f(x) = e^x$ のとき，$h(x) = \boxed{\text{ア}}$ となる。また，$f(x) = e^{-x}$ のとき，$h(x) = \boxed{\text{イ}}$ となる。

〔2〕 $f(x) = x$ とする。$g(x) = x$ のとき，$h(x) = \boxed{\text{ウ}}$ となる。また，$g(x) = \boxed{\text{エ}}$ のとき，$h(x) = x^3 - x^2$ となる。ここで，$\boxed{\text{エ}}$ は x の1次式である。

〔3〕 $h(0) = \boxed{\text{オ}}$ である。

$f(x)$ と $g(x)$ がともに偶関数であるならば，$h(-x)$ は $h(x)$ を用いて，$h(-x) = \boxed{\text{カ}}$ と表すことができる。

〔4〕 $f(x) = \cos x$，$g(x) = \sin x$ とする。このとき $h(x) = \boxed{\text{キ}}$ となる。

また，$x > 0$ の範囲で $h(x) = 0$ を満たす最小の x は $x = \boxed{\text{ク}}$ であり，$\displaystyle\int_0^{\boxed{\text{ク}}} h(x)\,dx = \boxed{\text{ケ}}$ である。また，$x > 0$ の範囲で $h'(x) = 0$ が成り立つとき，$\dfrac{\tan(2x)}{x} = \boxed{\text{コ}}$ である。

Ⅲ　平面上のへこみのない五角形ABCDEの内角および辺が次を満たしているとする。

$$\angle \mathrm{EAB} = 90^\circ,\ \mathrm{AB} = \mathrm{AE} = 1$$

$$\angle \mathrm{ABC} = 150^\circ,\ \mathrm{BC} = 2$$

$$\angle \mathrm{BCD} = 60^\circ,\ \mathrm{CD} = 1$$

図のように $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{x}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{y}$ とする。

このとき，DE = $\boxed{\text{ア}}$ である。三角形CDEの面積は $\boxed{\text{イ}}$ であり，五角形ABCDEの面積は $\boxed{\text{ウ}}$ である。(ただし，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ は二重根号を使わずに分母を有理化して答えよ。)

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ はそれぞれ $\vec{x}$, $\vec{y}$ を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boxed{\text{エ}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \boxed{\text{オ}}$$

と書ける。

よって，ADとECの交点をFとすれば，

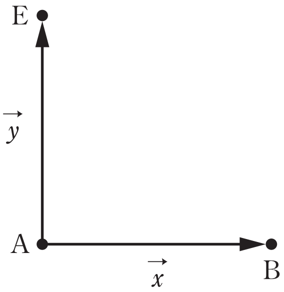
$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \boxed{\text{カ}}$$

となるので，FC = $\boxed{\text{キ}}$ である。(ただし，$\boxed{\text{カ}}$ は $\vec{x}$, $\vec{y}$ を用いて答えよ。)
したがって，四角形ABCFの面積は $\boxed{\text{ク}}$ となる。

さらに，点Oを

$$\overrightarrow{\mathrm{FO}} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{\mathrm{FA}} + \overrightarrow{\mathrm{FB}} + \overrightarrow{\mathrm{FC}} + \overrightarrow{\mathrm{FD}} + \overrightarrow{\mathrm{FE}})$$

により定めると，$\mathrm{FO}^2 = \boxed{\text{ケ}}$ である。



図

Ⅳ　座標平面内の曲線 $C : x^2 - 5y^2 = 1$ を考える。

〔1〕　定数 $a > 0$ に対して，直線 $\ell : y = x - a$ と曲線 C が接するのは $a = \boxed{\text{ア}}$ のときである。また，C と ℓ が相異なる2点で交わるとき，2点の y 座標がともに正となるのは $\boxed{\text{ア}} < a < \boxed{\text{イ}}$ のときである。

以後，a は $a > \boxed{\text{イ}}$ を満たす実数とする。

〔2〕　方程式 $|x - 2a| + |y| = a$ を満たす点 (x, y) で，曲線 C 上にあって $y > 0$ となるものは2個ある。これら2点を，y 座標が小さいものから順に P，Q とすると，

$$\text{P の座標は}\left(\frac{\boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{4},\ \frac{a + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{4}\right),$$

$$\text{Q の座標は}\left(\frac{\boxed{\text{オ}} - \sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{4},\ \frac{-3a + \sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{4}\right)\text{ である。}$$

ただし，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ は a の整式である。

〔3〕　領域 $D : |x - 2a| + |y| \leqq a$ に含まれる点のうち y 座標が最も大きい点を R とする。（△PQR の面積）を（領域 D の面積）で割った値を $f(a)$ とおき a の関数とみなすと，

$$f(a) = \frac{1}{32}\left(\boxed{\text{キ}} - \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{a}\right)\left(\boxed{\text{ク}} - \frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{a}\right)$$

である。ただし，$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ はいずれも定数である。特に，$\lim_{a \to \infty} f(a) = \boxed{\text{ケ}}$ が成り立つ。