数　学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について，問題文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを解答用紙の所定の欄に記入しなさい。ただし，近似値を記入してはいけません。分数を記入する際は，既約分数を記入しなさい。また，根号を含む分数を記入する際は，分母を有理化した分数を記入しなさい。

Ⅰ

〔1〕 座標平面において，次の連立不等式の表す領域 D に含まれる格子点（x 座標，y 座標がともに整数である点）の個数を考える。ただし，n は自然数とする。

$$\begin{cases} 1 \leqq x \leqq 3^n \\ 0 \leqq y \leqq \log_3 x \end{cases}$$

直線 $y = k$（k は整数）が領域 D と共通部分をもつとき，k の値の範囲は $\boxed{\text{ア}}$ である。

直線 $y = k$ と曲線 $y = \log_3 x$ との交点の座標は $\left(\boxed{\text{イ}},\ k\right)$ である。

したがって，領域 D に含まれる直線 $y = k$ 上の格子点の個数は，n と k を用いて $\boxed{\text{ウ}}$ と表される。

よって，領域 D に含まれる格子点の個数は，n を用いると

$$\left(\boxed{\text{エ}}\right)3^n + \boxed{\text{オ}}$$

となる。

〔2〕 $0 \leqq x < 2\pi$，$0 \leqq y < 2\pi$ のとき，次の連立方程式の解を求める。

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \sin y & \cdots\cdots① \\ \sin x = \sqrt{3} + \cos y & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，②より x を消去すると

$$\sin y - \boxed{\text{カ}} \times \cos y = \boxed{\text{キ}} \quad \cdots\cdots③$$

となる。ただし，$\boxed{\text{キ}}$ は定数である。

③は次のように変形できる。

$$\sin\left(y - \boxed{\text{ク}}\right) = \boxed{\text{ケ}}$$

ただし，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \boxed{\text{ク}} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であり，$\boxed{\text{ケ}}$ は定数である。

$0 \leqq y < 2\pi$ より，$y = \boxed{\text{コ}}$ である。

$y = \boxed{\text{コ}}$ を①，②に代入して，$0 \leqq x < 2\pi$ を満たす x の値を求めると

$$x = \boxed{\text{サ}}$$

が得られる。

〔3〕 700 点満点の試験をしたところ，受験者 10 人の得点 x は次の通りであった。

620，615，595，605，590，625，585，580，600，605

得点 x の平均値は，$\boxed{\text{シ}}$ である。

ここで，得点 x の仮平均を 600 として

$$u = \frac{x - 600}{5}$$

とすると，変量 u の標準偏差は $\boxed{\text{ス}}$ である。

したがって，得点 x の標準偏差は $\boxed{\text{セ}}$ である。

Ⅱ　p，q を $p \geqq 0 > q$ を満たす定数とし，関数 $f(x) = x^4 + 4px^3 + 2qx^2$ を考える。

〔1〕 関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とし，方程式 $f'(x) = 0$ の異なる3個の実数解を0，α，β とする。さらに $\alpha > \beta$ とすると，α は，p，q を用いて

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}}}}{2}$$

と表される。

〔2〕 関数 $f(x)$ が $x = -2$，2 で極値をとるとする。

このとき，$p = \boxed{\text{エ}}$，$q = \boxed{\text{オ}}$ であり，$-3 \leqq x \leqq 3$ における関数 $f(x)$ の最大値は $\boxed{\text{カ}}$，最小値は $\boxed{\text{キ}}$ である。

この関数 $y = f(x)$ のグラフを，直線 $y = \boxed{\text{キ}}$ に関して対称に折り返したグラフを関数 $y = g(x)$ のグラフとすれば

$$g(x) = \boxed{\text{ク}} \times x^4 + \boxed{\text{ケ}} \times x^2 - \boxed{\text{コ}}$$

である。

さらに，関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積 S は

$$S = \boxed{\text{サ}}$$

である。

Ⅲ　座標空間に存在する4点A，B，C，Dを頂点とする正四面体ABCDにおいて，△ABC，△BCD，△CAD，△ABDの重心をそれぞれP，Q，R，Sとする。正四面体ABCDの一辺の長さはaであり，A$\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}\,a}{2},\ 0\right)$，B$\left(\dfrac{-a}{2},\ 0,\ 0\right)$，C$\left(\dfrac{a}{2},\ 0,\ 0\right)$とする。また，点Dの$z$座標を正とする。

〔1〕 AP = BP = CP = $\boxed{\text{ア}}$，△BCPの面積は$\boxed{\text{イ}}$である。
ただし，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$についてはaを用いて答えよ。

〔2〕 点Dの座標は$\boxed{\text{ウ}}$，点Pの座標は$\boxed{\text{エ}}$，点Qの座標は$\boxed{\text{オ}}$，点Rの座標は$\boxed{\text{カ}}$，点Sの座標は$\boxed{\text{キ}}$である。

したがって，AQ = BR = CS = DP = $\boxed{\text{ク}}$，$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\boxed{\text{ケ}}$である。

ただし，$\boxed{\text{ウ}}$から$\boxed{\text{ク}}$までについてはaを用いて答えよ。

〔3〕 4本の線分AQ，BR，CS，DPは1点で交わり，その交点を正四面体ABCDの重心という。正四面体ABCDの重心をGとすると，実数x，yを用いて$\overrightarrow{SG}$を次のように表すことができる。

$$\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SD}+x\,\overrightarrow{DP}=y\,\overrightarrow{SC}$$

このとき，$x=\boxed{\text{コ}}$，$y=\boxed{\text{サ}}$である。

〔4〕 $\overrightarrow{GA}$と$\overrightarrow{GB}$のなす角をθとすると，$\cos\theta=\boxed{\text{シ}}$である。

Ⅳ　n を2以上の整数とする。図1のように，同じ大きさの立方体の箱を横に2個並べ，手前から奥に向かって合計 $2n$ 個並べた直方体がある。なお，図1は $n=3$ のときの直方体を真上から見たときのものである。

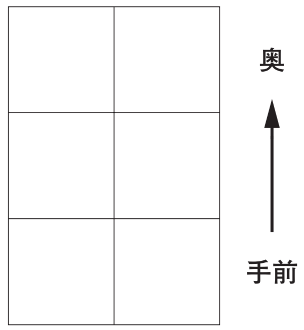

図1

一番手前にある2個の箱を除くすべての箱に1枚ずつ硬貨を投げ入れる。硬貨を投げ入れたとき表裏が出る確率は，それぞれ $\dfrac{1}{2}$ である。

ここで，次の事象 A，B を考え，事象 A が起こる場合の数を a_n，事象 A が起こる確率を P_n とする。

A：お互いに側面が接しており，かつ硬貨が入っている2個の箱の中を見ると，少なくとも1枚は裏が出ている

B：表が出ている硬貨の枚数と裏が出ている硬貨の枚数が等しい

図2は $n=6$ のときの積事象 $A \cap B$ の例を示している。

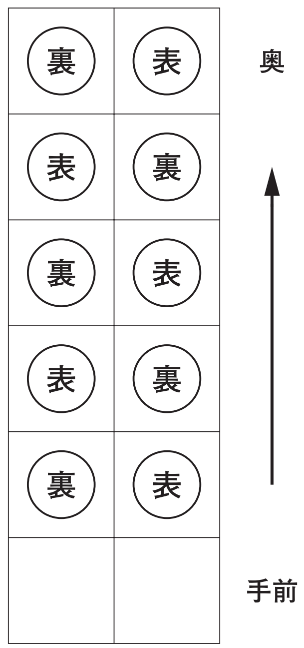

図2

〔1〕　$n=2$ の場合，箱の総数は4であるが，硬貨を投げ入れる箱の数は2である。したがって，

$a_2 = \boxed{\text{ア}}$，$P_2 = \boxed{\text{イ}}$ である。

$n=3$ の場合，$a_3 = \boxed{\text{ウ}}$，$P_3 = \boxed{\text{エ}}$ である。

$n=4$ の場合，$P_4 = \boxed{\text{オ}}$ である。

〔2〕　$n \geqq 4$ のとき，次の漸化式が成り立つ。

$$a_n = \boxed{\text{カ}} \times a_{n-1} + \boxed{\text{キ}} \times a_{n-2}$$

$n=6$ の場合，$P_6 = \boxed{\text{ク}}$ である。

$n=6$ の場合，事象 A が起こったことがわかっているとき，事象 B が起こる確率は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

〔3〕 α，β を実数として，〔2〕の漸化式を次のように変形する。

$$a_n - \alpha a_{n-1} = \beta\,(a_{n-1} - \alpha a_{n-2})$$

この式を満たす α，β の組は2組あり

$(\alpha,\ \beta) = \left(\ \boxed{\text{コ}}\ ,\ \boxed{\text{サ}}\ \right)$ または $(\alpha,\ \beta) = \left(\ \boxed{\text{サ}}\ ,\ \boxed{\text{コ}}\ \right)$

である。ただし，$\boxed{\text{コ}} < \boxed{\text{サ}}$ とする。

α，β の組が2組あるので，二つの漸化式が得られる。これらの漸化式から数列 $\{a_n\}$ の一般項を計算して，P_n を求めると

$$P_n = \boxed{\text{シ}}$$

となる。